Perturbative RG

Chapter 4. Kardar

بسم الله النور

$$[K'] = R_\ell [K] \longrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} ① & \text{Coarse grain} & (I) \\ ② & \text{Rescale} & (R) \\ ③ & \text{Renormalize} & (R) \end{array} \right\} R_o R_o I$$

$\vec{m}(x)$: Vector field $\qquad m_i(x) \quad i=1,\dots n$

Ⅰ $$m_i(x) = \frac{1}{\ell^d} \int_{x' \in x} d^d x' \, m_i(x') \longrightarrow S_I = \frac{1}{\ell^d} \sum_{i \in I}^{\ell^d} S_i$$

Ⅱ $$X_{New} = \frac{X_{old}}{\ell}$$

Ⅲ $$m_i^{New}(x_{New}) = m_i^{old}(x_{old})\, \ell^{\Delta} = \frac{m_i(x_{old})}{\vartheta}$$

$$\vartheta = \ell^{-\Delta} \qquad \Delta \equiv x_h / x_t$$

به ترتیب ۳ مرحله قبل

$$f(t,h,u,\dots) = \ell^{-d} f(\ell^{x_t} t, \ell^{x_h} h, \ell^{x_u} u, \dots)$$

$x_t,\ x_h,\ x_u, \dots$ به دنبال تعیین این نماها هستیم.

از این پس توجه خود را به Z جلب می‌کنیم

Ex: Gaussian Model.

Gaussian Model

بدون استفاده از RG: نماهای بحرانی را استخراج کنم. ← دقیق f را حساب کنم

Landau - Ginzburg Model

$$Z = \int \mathcal{D}\vec{m}(x)\, e^{-\int d^d x \left[\frac{t}{2} m^2(x) + \frac{K}{2} (\nabla m)^2 + \frac{L}{2} (\nabla^2 m)^2 + \cdots \cancel{+ \frac{u m^4}{4}} - \vec{h}\cdot\vec{m}(x) \right]}$$

Marginal

نقطه بحرانی و کلا ضرایب مربوط مشخص می‌شود $\begin{pmatrix} t=0 \\ h=0 \end{pmatrix}$

طبق تعریف

$(\nabla \equiv -iq)$

حساب شود $\longrightarrow f = \checkmark \longrightarrow\ ?$

$$\vec{m}(\vec{q}) = \int \frac{d^d x}{(2\pi)^d}\, e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}\, \vec{m}(\vec{x}) \Rightarrow \vec{m}(\vec{x}) = \sum_q \frac{e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{V}\, \vec{m}(\vec{q})$$

$$Z = \int \mathcal{D}\vec{m}(x)\, e^{-\beta\tilde{\mathcal{H}}}$$

$$+\beta\tilde{\mathcal{H}} = \sum_q \left(\frac{t + Kq^2 + Lq^4 + \cdots}{2V} \right) |\vec{m}(\vec{q})|^2 - \vec{h}\cdot\vec{m}(q=0)$$

$$Z = \prod_q V^{-n/2} \int \mathcal{D}\vec{m}(q)\, \mathrm{Exp}\left[-\frac{(t + Kq^2 + Lq^4 + \cdots)}{2V} |\vec{m}(q)|^2 + \vec{h}\cdot\vec{m}(q=0) \right]$$

$$Z = e^{\frac{Vh^2}{2t}} \prod_q \left(\frac{2\pi}{t + Kq^2 + Lq^4 + \cdots} \right)^{n/2}$$

$q = 0 \downarrow L \to \infty$

ویژگی بزرگ مقیاس

$q \neq 0 \to L < \infty, \cancel{L=0}$

$L = a$

$q = \Lambda = \frac{1}{a}$

حاوی رفتار کلی مسئله است

$$\tilde{f}(t,h) = -\frac{\ln Z}{V} = \frac{n}{2}\int_0^{\Lambda}\frac{d^d q}{(2\pi)^d}\ln(t + Kq^2 + Lq^4 + \dots) - \frac{h^2}{2t}$$

$$f(t,h) = t^{\frac{d}{2}} g_f\left(\frac{h}{t^{\Delta}}\right) = t^{2-\alpha} g_f\left(\frac{h}{t^{\Delta}}\right)$$

$$C \sim \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \sim t^{-\alpha}$$

$$f \sim t^{2-\alpha}$$

$\alpha, \Delta = \checkmark$

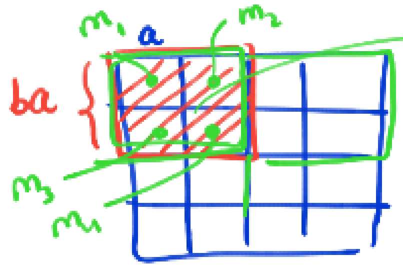
$\downarrow$

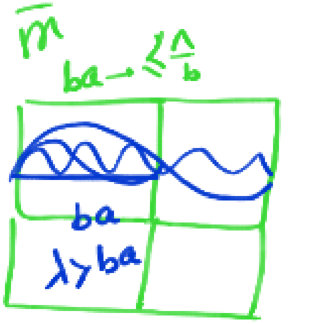
تعیین نماها

Ex 2: Gaussian Model Using RG

$$Z \sim \int D\vec{m}(x)\, e^{-\beta\mathcal{H}} \sim \int D\vec{\tilde{m}}(\vec{q}) \exp\left[-\int_0^{\Lambda}\frac{d^d q}{(2\pi)^d}\left(\frac{t + Kq^2 + Lq^4 + \dots}{2}\right)|\vec{m}(q)|^2 + \vec{h}\cdot\vec{m}(q=0)\right]$$

① Coarse grain





فضای مختصات

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{a \ll x \to ba \ll x}_{} \\ a \ll x \ll ba \end{array} \right.$$

جمع زده‌ام.

$$\begin{cases} a \to \Lambda^{-1} \\ x \to q^{-1} \end{cases}$$

$q = \frac{2\pi}{\lambda}$

$ba > \lambda = \frac{2\pi}{q} \to q < \Lambda/a$

باقی می‌مانند $\Leftarrow \underbrace{}_{}$ $q_<$

$$\underbrace{a \leq x}_{} \left(\Lambda \geq q \right) \longrightarrow ba \ll x \left[\left(q \ll \frac{\Lambda}{b} \right) \right]$$

فضای فوریه

$$a \ll x \ll ba \; \Big(\underbrace{\frac{\Lambda}{b} \ll q \ll \Lambda}_{q_>} \Big)$$

جمع می‌زنیم.

$\longleftarrow \quad \vec{m}(\vec{q})$ مدهای فوریه $q_>$

$$\{ \vec{m}(\vec{q}) \} \equiv \{ \vec{\sigma}(\vec{q}_>) \} \oplus \{ \tilde{\vec{m}}(\vec{q}_<) \}$$

$q_> \in [\frac{\Lambda}{b}, \Lambda] \qquad q_< \in [0, \frac{\Lambda}{b}]$

$$Z = \underbrace{\underbrace{\int D\tilde{\vec{m}}(q_<) \int D\vec{\sigma}(q_>)}_{\int \bar{D}\vec{m}(q)}}_{} \; e^{-\beta \mathcal{H}[\tilde{\vec{m}}, \vec{\sigma}]}$$

$$\underbrace{\int_0^{\Lambda/b} \int^{\Lambda}}_{\Lambda/b}$$

Coarse grain

$$Z = Z_< Z_>$$

$$Z = \exp\Big[\underbrace{- \frac{n}{2} \bar{V} \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \ln(t + Kq^2 + Lq^4 + \dots)}_{Z_>} \Big]$$

$$\Big(- \tilde{\ } \dots \quad \Big] \int^{\Lambda/b} d^d q \, (t + Kq^2 + Lq^4 + \dots) |m(q)|^2$$

$$Z_<\left\{ \times\int \mathcal{D}m(q)_< \exp\left[-\int_0 \frac{d^dq}{(2\pi)^d}\left(\frac{\cdots}{2}\right)\cdots + \bar{h}\cdot\vec{m}(q=0)\right]\right.$$

② Rescale: $x' = x/b \rightarrow q' = bq \rightarrow \boxed{q = q'/b}$

$$Z = \underbrace{e^{-Vf_0}}_{Z_>} \int \mathcal{D}\tilde{m}(q)_< \, e^{\left(-\int_0^\Lambda \frac{d^dq'}{(2\pi)^d} b^{-d}\left(\frac{t + Kb^{-2}q'^2 + Lb^{-4}q'^4 \cdots}{2}\right)\underbrace{|\tilde{m}(q')|^2}\, + \bar{h}\cdot\vec{m}(q'=0)\right)}$$

③ Renormalize

فضای حقیقی

$$\left\{\begin{array}{l} m'(x') = \dfrac{m(x')}{z} = b^{\Delta} m(x') \qquad z = b^{\Delta} \\[2ex] m'(q') = \dfrac{\tilde{m}(q')}{z} \end{array}\right.$$

فضای فوریه

فرض آزمایشی

$$Z = Z_> \int \mathcal{D}\, m'(q')\, \exp\left[-\int_0^\Lambda \frac{d^dq'}{(2\pi)^d} \, b^{-d} z^2 \left(\frac{t + Kb^{-2}q'^2 + Lb^{-4}q'^4 \cdots}{2}\right)|m'(q')|^2 + \bar{h}\cdot m'(q'=0)\, z\right]$$

تقاضا Z تغییر نکند

Relevant

$$[K] = \left\{\begin{matrix} t \\ h \\ K \\ L \end{matrix}\right\} \longrightarrow [K'] = \left\{\begin{matrix} t' \\ h' \\ \cdots \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} t' = z^2 b^{-d} t \\ K' = z^2 b^{-d-2} K \\ \cdots \end{array}\right\}$$

تغییرات مربوطه

K'

L'

$$l' = z^2 b^{\ldots} l$$

$$h' = z h$$

ضرایب جفت شدگی تک

$$RG \equiv R_0 R_0 I$$

در نقطه بحرانی $(t=0, h=0)$ تابع پارش ثابت فرض می‌شود یعنی در این نقطه اشکال رفتار

مقیاس ناوردایی در $Z \leftarrow f$ داریم. یعنی اینکه بقیه پارامترها باید ثابت باشند

$$K' = K \Rightarrow z^2 b^{-d-2} = cts \longrightarrow \boxed{z = b^{1+d/2}} \longrightarrow \nu = b^{-1-d/2}$$

حداقل تعامل

$$t' = z^2 b^{-d} t = b^{2+d} b^{-d} t = b^2 t = b^{x_t} t$$

$$\boxed{x_t = 2}$$

$$h' = z h = b^{1+d/2} h = b^{x_h} h$$

$$\boxed{x_h = 1 + d/2}$$

$$\begin{cases} \alpha = 2 - \dfrac{d}{x_t} \\ \nu = \dfrac{1}{x_t} = 1/2 \\ \beta = \dfrac{d - x_h}{x_t} \end{cases} \longrightarrow \text{وقس علی هذا}$$